

Multiple Choice

- (1) Die reellen Zahlen können geordnet werden. (2x)
- (2) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ invertierbar. Ist f differenzierbar auf \mathbb{R} dann ist auch f^{-1} differenzierbar auf \mathbb{R} . (2x)
- (3) Jede nach unten beschränkte und monoton fallende Folge besitzt einen Grenzwert.
- (4) $(e^{3x})' = e^{3x}$
- (5) Ist (a_n) konvergent, dann ist auch $(\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k))$ konvergent. (2x)
- (6) Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann grösser werden, wenn diese abgeleitet wird.
- (7) Die Menge der berechenbaren reellen Zahlen bilden einen Körper.
- (8) Gilt $f(a) < 0 < f(b)$ für eine stetige Funktion f in \mathbb{R} , dann besitzt diese eine Nullstelle.
- (9) Jede nach oben beschränkte und monoton fallende Folge (a_n) besitzt einen Grenzwert. (2x)
- (10) Wenn f in \mathbb{R} stetig ist, dann ist f in jedem endlichen Intervall von \mathbb{R} integrierbar. (2x)
- (11) Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.
- (12) Jede Funktion ist berechenbar.
- (13) Sei $a_n \in (0, 1)^\infty$. Konvergiert $(\sqrt{a_n})$ dann konvergiert auch (a_n) .
- (14) Jede nach unten beschränkte und monoton steigende Folge besitzt einen Grenzwert.
- (15) Sei f eine beliebige Funktion in \mathbb{R} . Wenn f auf \mathbb{R} differenzierbar ist, dann ist $\frac{1}{f}$ in \mathbb{R} stetig.

Definitionen

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie (ggf. nur mit Hilfe von Nullfolgen)

- a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0 (2x)
- b) Eine Folge (a_n) konvergiert gegen den Grenzwert $M \in \mathbb{R}$
- c) f ist differenzierbar in x_0 (alt. stetig)
- d) f ist differenzierbar auf \mathbb{R} (alt. stetig)

Beweise

- (1) Seien f und g differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R} . Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass $q(x) = f(x) - 2g(x)$ differenzierbar auf \mathbb{R} ist. (2x)
- (2) Seien f und g in \mathbb{R} stetige Funktionen. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen, dass $q(x) = f(x) - g(x)$ stetig in \mathbb{R} ist.
- (3) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen oder widerlegen Sie (alt. mit Nullfolgen)
 - (a) Wenn f^2 differenzierbar auf \mathbb{R} ist, dann ist f auch differenzierbar auf \mathbb{R} .

- (b) Wenn f stetig in \mathbb{R} ist, dann ist f auch differenzierbar auf \mathbb{R} .
 (c) Wenn f stetig in \mathbb{R} ist, dann ist auch f^2 stetig in \mathbb{R} .
 (d) Wenn f^2 stetig in \mathbb{R} ist, dann ist auch f stetig in \mathbb{R} ,

Rekurrenzen

- a) Finden Sie eine Rekurrenz g_n mit

$$(1 - 2x - x^2) \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \right) = 1$$

(2x)

- b) Bestimmen Sie eine Formel für $f_n \in \mathbb{R}$ (eine Rekurrenz mit den entsprechenden Startwerten $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{Q}$) mit

$$(1 + 3x + 2x^2 + x^3) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \right) = 1$$

Grenzwerte

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+4) \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n}}}{3n+16}$$

e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8n^{100} + 1}{2n^{100} + 50n^{50} + 1}} + 5$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 2x^3 + 5x^7}{2e^{2x} - e^x - 1}$$

f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + 2x^{10}}{e^{3x} - ex}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8e^{2n} + 1}{e^{2n} + 4e^n + 1} + \frac{n}{n+1}}$$

g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{n^2} + 5e^{n^3}}{1 + e^{n^3}}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{xe^x}$$

h)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2 + 2x^5}{e^{x^2} - e^{2x}}$$

Konvergenz(radien)

Ermitteln Sie den Konvergenzradius.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{12}}{(4n+1)^{12}} x^n$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(2n+1)^{10}} x^n$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n}}{n^n} x^n$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)^n} x^n$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n} x^n$$

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{100}}{n^{100}}$$

c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\pi}$$

e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 2^{-n} + 2}$$

f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+1}}{n^n}$$

Stammfunktionen

a)

$$\int x e^{4x}$$

d)

$$\int \frac{\sqrt{\frac{1}{x^3} + 5}}{x^4}$$

f)

$$\int \sin(x) e^{\cos(x)}$$

h)

$$\int x^2 e^x$$

b)

$$\int x^3 e^x$$

e)

$$\int \sin(x)^2$$

g)

$$\int x^2 \sin(x^3)$$

i)

$$\int \ln(5x)$$

c)

$$\int \sin(x) e^{-2 \cos(x)}$$

Ableitungen

a) $f(x) = (1-x)^a$ mit $a \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = (1-x)^{1-x}$

b) $f(x) = a^{1-x}$ mit $a \in (0, \infty)$