Aufgabe 1 Sei $t = \frac{1}{x}$, nun ist $x \to \infty$ äquivalent zu $t \to 0^+$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-f'(1/t)/t^2}{-g'(1/t)/t^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Aufgabe 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{e^x} = 0$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Potenz von x, e^x wächst schneller als jedes Polynom.

Aufgabe 3

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[7]{x}}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{7x^{6/7}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{7x^{6/7}} = \infty$$

Welche Wurzel genommen wird ist irrelevant.

Aufgabe 4

a)

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 3)dx = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 3dx = x^4 - 2x^3 + 3x + c$$

b)

$$\int (x^5 + 9x^4 - 7x^3 + x^2 - x - 8)dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 8x + c$$

c) Wir wissen $\int \cos(x)^2 dx = \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + c$ und $\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2$, somit

$$\int \sin(x)^2 dx = \int 1dx - \int \cos(x)^2 dx = x + c_1 - \frac{1}{2}\cos(x)\sin(x) + \frac{1}{2}x + c_2$$

d)

$$\int \sec(x)^2 dx = \tan(x)$$

Aufgabe 5

a) Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = x$, dann

$$\int x\ln(x)dx = \int f(x)g'(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \int \frac{1}{x}\frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2$$

b)

$$\int(-7x^{-1}+13x^{-2})dx = \int -\frac{7}{x}xd + \int \frac{13}{x^2}dx = 7|\ln(x)| - \frac{13}{x} + c$$

c)

$$\int(5x^{-5}-8x^{-4}+2x^{-1})dx = \int \frac{5}{x^5}dx - \int \frac{8}{x^4}dx + \int \frac{2}{x}dx = -\frac{5}{4x^4} + \frac{8}{3x^3} + 2|\ln(x)| + c$$

Aufgabe 6 Nachdem wir nur Gravitationskräfte betrachten ist anzunehmen, dass der Ball fallen gelassen (und nicht geworfen) wird.

a) Es gilt $a(t) = v'(t)$ bzw. $v(t) = \int a(t) = gx + c$. Das c repräsentiert die Initialgeschwindigkeit die unbekannt ist, im gegebenen Beispiel ist $c = 0$ anzunehmen.

b) Es gilt $v(t) = gx + c_1 = h'(t)$ bzw. $h(t) = \int(gx + c_1)dx = \frac{1}{2}gx^2 + c_1x + c_2$.

c) Gemäß der obigen Funktion der Höhe des Balls erwarten wir eine Parabel.