**Aufgabe 1** Wir wissen

$$\forall,\ u_1, v_1 \in U_1 : u_1 \circ v_1 \in U_1 \wedge u_1^{-1} \in U_1$$
$$\forall,\ u_2, v_2 \in U_2 : u_2 \circ v_2 \in U_2 \wedge u_2^{-1} \in U_2.$$

a) Zu zeigen ist, dass $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $\forall\, u, v \in U_1 \cap U_2 : u \circ v \in U_1 \cap U_2 \wedge u^{-1} \in U_1 \cap U_2$.

   Ist $e$ das Neutralelement einer Gruppe $G$ so gilt für alle Untergruppen $U$ von $G$, dass $e \in U$. Demzufolge gilt $e \in U_1$ und $e \in U_2$ und weiters $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

   Wenn $u, v \in U_1 \cap U_2$ dann gilt $u, v \in U_1$ und $u, v \in U_2$. Nachdem $U_1$ und $U_2$ Untergruppen sind gilt weiters $u \circ v \in U_1$ und $u \circ v \in U_2$. Daraus folgt $u \circ v \in U_1 \cap U_2$.

   Analog dazu, wenn $u \in U_1 \cap U_2$ dann gilt $u \in U_1$ und $u \in U_2$. Weiters gilt $u^{-1} \in U_1$ und $u^{-1} \in U_2$. Daraus folgt $u^{-1} \in U_1 \cap U_2$.

   Demzufolge ist $U_1 \cap U_2$ eine Untergruppe von $G$.

b) Zu zeigen ist, dass $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$ und $\forall\, u, v \in U_1 \cup U_2 : u \circ v \in U_1 \cup U_2 \wedge u^{-1} \in U_1 \cup U_2$.

   Nachdem $U_1$ und $U_2$ Untergruppen sind muss gelten, dass $U_1 \neq \emptyset$ und $U_2 \neq \emptyset$. Demzufolge gilt $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$.

   Man wähle ein $u_1 \in U_1 \backslash U_2$ und ein $u_2 \in U_2 \backslash U_1$. Es gilt $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$. Unter der Annahme, dass $U_1 \cup U_2$ eine Untergruppe ist, muss nun gelten, dass

$$u_1 \circ u_2 \in U_1 \cup U_2 \Rightarrow \begin{cases} u_1 \circ u_2 \in U_1 & \text{oder} \\ u_1 \circ u_2 \in U_2 \end{cases}$$

   und weiters, nachdem es in einer Untergruppe $U$ für jedes $v \in U$ ein $v^{-1} \in U$ gibt,

$$u_1 \circ u_2 \in U_1 \Rightarrow u_1 \circ u_1^{-1} \circ u_2 \in U_1 \Rightarrow u_2 \in U_1$$
$$u_1 \circ u_2 \in U_2 \Rightarrow u_2 \circ u_2^{-1} \circ u_1 \in U_2 \Rightarrow u_1 \in U_2.$$

   Beide „Implikationsmöglichkeiten“ von $u_1 \circ u_2 \in U_1 \cup U_1$ führen also zu einem Widerspruch nachdem gilt, dass $u_1 \notin U_2$ und $u_2 \notin U_1$. Demnach ist $U_1 \cup U_2$ nicht zwingend eine Untergruppe von $G$.

   (Tatsächlich wurde gezeigt, dass $U_1 \cup U_2$ nur dann eine Untergruppe von $G$ ist, wenn entweder für alle $u_1 \in U_1$ gilt, dass $u_1 \in U_2$, oder für alle $u_2 \in U_2$ gilt, dass $u_2 \in U_1$ — also wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.)

**Aufgabe 2**

a) $\langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle = \{id,\ (1\ 2)(3\ 4)\ \}$

b) $\langle(1\ 2), (3\ 4)\rangle = \{id, (1\ 2), (3\ 4), (1\ 2)(3\ 4)\}$

c) $\langle(1\ 2\ 3\ 4)\rangle = \{id, (1\ 2\ 3\ 4), (4\ 3\ 2\ 1), (1\ 3)(2\ 4)\}$

d) $\langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)\rangle = \{id, (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3), (4\ 3\ 2\ 1), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 4)\}$

**Aufgabe 3**

a) $\langle(1\ 2\ 3), (4\ 5)\rangle$

b) $\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 3\ 5\ 2\ 4)\rangle$

c) $\langle(2\ 4)(3\ 5)\rangle$