Aufgabe 1

a) $(1\ 5\ 6\ 4\ 8\ 9)(2\ 7\ 2)$

b) $(1\ 9\ 2\ 6\ 3\ 7\ 8\ 4)$

c) Sei $\pi = (c_1\ c_2\ \ldots\ c_k)$ ein beliebiger Zyklus. Es gilt $\pi(c_i) = c_{i+1}$ und $\pi^{-1}(c_{i+1}) = c_i$, also $\pi^{-1} = (c_k\ c_{k-1}\ \ldots\ c_1)$. Konkret gilt nun

$$\begin{aligned}
\pi &= (1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)\\
\pi^{-1} &= (4\ 5\ 2\ 7\ 3\ 1)\\
\pi^{-2} &= (1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)\\
\pi^{-3} &= (4\ 5\ 2\ 7\ 3\ 1)
\end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^2 &= (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4)\\
(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^3 &= (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)\\
(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^4 &= (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4)\\
(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^5 &= (1\ 5\ 7)(2\ 3\ 4)\\
&\cdots\\
(1\ 3\ 7\ 2\ 5\ 4)^{1000} &= (1\ 7\ 5)(3\ 2\ 4).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Man wähle aus S_2 die Permutation $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Diese Permutation besteht nur aus dem Zyklus (12), müsste aber gemäß der gegebenen Aussage aus mindestens zwei Zyklen bestehen.

b) Eine Permutation $\pi \in S_n$ sei in disjunkte Zyklen zerlegt. Die Summe der Längen dieser Zyklen ist n, nachdem sie disjunkt sind. Die kleinste Länge eines Zyklus ist 1. Somit kann π in höchstens n disjunkte Zyklen zerlegt werden.

c) Man wähle aus S_2 die Permutation $\pi = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ mit dem Zyklus (12). Die Permutation $\pi^2 = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ besteht aus den disjunkten Zyklen (1)(2). Somit besteht π aus weniger Zyklen als π^2.

d) Es gelte $\pi \in S_n$. Es gibt nun disjunkte Zyklen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ derart, dass $\pi = c_1 c_2 \ldots c_k$ und $\pi^2 = c_1^2 c_2^2 \ldots c_k^2$. Ist c ein Zyklus so besteht c^2 aus mindestens einem Zyklus. Somit sind in π^2 mindestens so viele Zyklen wie in π enthalten, in anderen Worten besteht π aus höchstens so vielen disjunkten Zyklen wie π^2.

Aufgabe 3

1. Zu zeigen ist $\forall\, x, y, z \in G : (x * y) * z = x * (y * z)$. (Assoziativität.)

Seien $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in G$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (c_1, c_2) &= \\ (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1) * (c_1, c_2) &= \\ ((a_1b_1 - a_2b_2)c_1 - (a_1b_2 + a_2b_1)c_2, (a_1b_1 - a_2b_2)c_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)c_1) &= \\ ((a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1) - (a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2), (a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2) + (a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)) &= \\ (a_1b_1c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2, a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1)&\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2)) &= \\ (a_1, a_2) * (b_1c_1 - b_2c_2, b_1c_2 + b_2c_1) &= \\ (a_1(b_1c_1 - b_2c_2) - a_2(b_1c_2 + b_2c_1), a_1(b_1c_2 + b_2c_1) + a_2(b_1c_1 - b_2c_2)) &= \\ ((a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2) - (a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1), (a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) + (a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2)) &= \\ (a_1b_1c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1, a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_2c_2)&\end{aligned}$$

und somit

$$((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (c_1, c_2) = (a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2)).$$

2. Zu zeigen ist $\exists\, e \in G : \forall\, x \in G : x * e = e * x = x$. (Neutralelement.)

   Für $e = (1, 0)$ und beliebige $(a, b) \in G$ gilt

$$\begin{aligned}(a, b) * (1, 0) = (1, 0) * (a, b) \ &= (a, b) \\ (a - 0, 0 + b) = (a - 0, 0 + b) &= (a, b).\end{aligned}$$

3. Zu zeigen ist $\forall\, x \in G : \exists\, y \in G : x * y = y * x = e$, wobei $e \in G$ das Neutralelement ist. (Invertierbarkeit.)

   Für beliebige $(a, b) \in G$ gebe es ein $c \in G$ derart, dass

$$(a, b) * c = c * (a, b) = (1, 0).$$

   Man wähle

$$c = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right),$$

   nun gilt

$$\begin{aligned}(a, b) * \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) * (a, b) &= (1, 0) \\ \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) &= (1, 0) \\ \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2}\right) &= (1, 0) \\ (1, 0) &= (1, 0).\end{aligned}$$