

Aufgabe 1.

- a) Keine Äquivalenzrelation. Symmetrie gilt nicht: Für $a = 1$ und $b = -1$ gilt $a \sim_1 b$ ($1 - (-1) \geq 0$), nicht aber $b \sim_1 a$ ($-1 - 1 \not\geq 0$).
- b) Äquivalenzrelation.
- c) Keine Äquivalenzrelation. Reflexivität gilt nicht: Für $a = 1$ und $b = a$ gilt $a \sim_3 b$ nicht ($ab \not\leq 0$).
- d) Äquivalenzrelation.
- e) Äquivalenzrelation.
- f) Keine Äquivalenzrelation. Transitivität gilt nicht: Für $c = 10^{-50}$, $x = 2c$, $y = 2.5c$ und $z = 3c$ gelten zwar $|x - y| < c$ ($0.5c < c$) und $|y - z| < c$ ($0.5c < c$), nicht aber $|x - z| < c$ ($c \not< c$).

Aufgabe 2.

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{\blacksquare\}, \{\bullet\}, \{\blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\bullet, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} [\emptyset]_{\sim} &= \{\emptyset\} \\ [\{\bullet\}]_{\sim} &= \{\{\bullet\}\} \\ [\{\blacktriangle\}]_{\sim} &= \{\{\blacktriangle\}\} \\ [\{\bullet, \blacktriangle\}]_{\sim} &= \{\{\bullet, \blacktriangle\}\} \\ [\{\blacksquare\}]_{\sim} &= [\{\blacksquare, \bullet\}]_{\sim} = [\{\blacksquare, \blacktriangle\}]_{\sim} = [\{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}]_{\sim} = \{\{\blacksquare\}, \{\blacksquare, \bullet\}, \{\blacksquare, \blacktriangle\}, \{\blacksquare, \bullet, \blacktriangle\}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

- a) Die Funktion $\text{isEqual}(T_1, T_2)$ gibt genau dann „True“ zurück wenn jede Komponente von T_1 auch in T_2 enthalten ist und umgekehrt, andernfalls gibt sie „False“ zurück. „Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn für jedes Objekt x gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.“ (Skriptum, S. 4) Nachdem Tupeln in diesem Kontext Mengen darstellen, modelliert isEqual also eine Gleichheitsrelation zwischen Mengen. „Für jede Menge A ist die Gleichheitsrelation = eine Äquivalenzrelation, denn für alle Objekte x, y, z gilt $x = x$ (Reflexivität), $x = y \Leftrightarrow y = x$ (Symmetrie) und $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$ (Transitivität).“ (Skriptum, S. 21)

Somit wird durch $T_1 \sim T_2 \Leftrightarrow \text{isEqual}(T_1, T_2)$ eine Äquivalenzrelation definiert.

- b) Wie in a) erwähnt sind zwei Mengen gleich, wenn für jedes Objekt x gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Das ist das einzige Kriterium, nicht „wie oft“ oder „in welcher Reihenfolge“ ein Element vorkommt. (Skriptum, S.4) Somit hat die konkrete Wahl von Tupeln aus den Äquivalenzklassen die u als Eingabe erhält keinen Einfluss auf ihr Ergebnis.

Die Implementierung passt also insofern zu jener aus a) als bei gleichbleibenden (nach isEqual) Eingabetupeln auch das ausgegebene Tupel gleich bleibt. Gilt $\text{isEqual}(T_1, T'_1)$ und $\text{isEqual}(T_2, T'_2)$ gilt auch $\text{isEqual}(\text{union}(T_1, T_2), \text{union}(T'_1, T'_2))$.

- c) Die Länge eines Tupels ist nicht zwingendermaßen gleich der Größe der Menge die es codiert. So gilt etwa $|\{1, 2, 3\}| = |\{1, 2, 2, 3, 3, 3\}| = 3$ aber $\text{size}((1, 2, 3)) = 3$ und $\text{size}((1, 2, 2, 3, 3, 3)) = 6$.