

**Aufgabe 1.** Die Relation  $\leq$  auf  $A$  ist nur dann eine Halbordnung wenn sie auch eine transitive Relation ist (Skriptum, Definition 7.3). Es muss also gelten, dass

$$\forall x, y, z \in A : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

Weiters muss für eine Halbordnung die Antisymmetrie gelten (Skriptum, Definition 7.2) gelten, also

$$\forall x, y \in A : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y.$$

Wählt man nun  $x = a$ ,  $y = b$  und  $z = c$  so kann aus dem gegebenen Ausdruck  $a \leq b \leq c \leq a$  gemäß der Transitivität abgeleitet werden, dass  $a \leq b$  und  $b \leq a$ . Gemäß der Antisymmetrie müsste nun gelten, dass  $a = b$ . Gegeben ist allerdings  $a \neq b$ . Die gegebene Relation kann also keine Halbordnung sein.

**Aufgabe 2.** Es gelte  $x, y \in \mathbb{N}$ .

- Isoton nachdem  $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ .
- Nicht isoton nachdem  $x \leq y \not\Rightarrow x^2 \mid y^2$ . (Man wähle etwa  $x = 2$  und  $y = 3$ . Es gilt  $2 \leq 3$ , nicht aber  $4 \mid 9$ .)
- Isoton nachdem  $x \mid y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ . ( $x \mid y$  impliziert,  $x \cdot n = y$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Es gilt also auch  $|x| \leq |y|$  und somit  $x^2 \leq y^2$ .)
- Isoton nachdem  $x \mid y \Rightarrow x^2 \mid y^2$ .

**Aufgabe 3.**

- $I$  beschreibt die Injektivität von  $f$  und  $H$  die „Halbgeordnetheit“ von  $\sqsubseteq$ . Zu zeigen ist  $I \Rightarrow H$ .

Man wähle beliebige  $a_1, a_2 \in A$  derart, dass  $a_1 \neq a_2$  und  $f(a_1) = f(a_2)$ . Nachdem  $\leq$  eine Halbordnung ist gilt nun  $f(a_1) \leq f(a_2)$  und  $f(a_2) \leq f(a_1)$ . Es muss nun also gelten, dass  $a_1 \sqsubseteq a_2$  und  $a_2 \sqsubseteq a_1$ . Nachdem  $a_1 \neq a_2$  kann  $\sqsubseteq$  gemäß der Voraussetzung der Antisymmetrie keine Halbordnung sein.

Es wurde gezeigt, dass wenn  $f$  nicht injektiv ist,  $\sqsubseteq$  keine Halbordnung auf  $A$  sein kann —  $\neg I \Rightarrow \neg H$ . Damit gilt  $I \Rightarrow H$

- Man wähle beliebige  $a_1, a_2 \in A$  mit  $a_1 = a_2$ . Unter der Annahme, dass  $\sqsubseteq$  eine Halbordnung ist, gilt nun  $a_1 \sqsubseteq a_2$  und  $a_2 \sqsubseteq a_1$ . Nachdem  $a_1 \sqsubseteq a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$  gilt nun weiter  $f(a_1) \leq f(a_2)$  und  $f(a_2) \leq f(a_1)$ . Gemäß der Antisymmetrie muss nun gelten, dass  $f(a_1) = f(a_2)$ .

Ist  $\sqsubseteq$  eine Halbordnung muss  $f$  also injektiv sein. ( $H \Rightarrow I$ .)